Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Ondruš

Úrokové opce a jejich oceňování v binomickém modelu

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Lenka Slámová MSc
Studijní program:	matematika
Studijní obor:	finanční matematika

Praha 2012

Na tomto mieste by som sa rád poďakoval Mgr. Lenke Slámovej MSc za odborné vedenie, cenné pripomienky a konzultácie pri písaní mojej bakalárskej práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Úrokové opce a jejich oceňováni v binomickém modelu

Autor: Martin Ondruš

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Lenka Slámová MSc

Abstrakt: V tejto práci sa budeme zaoberať binomickým modelom oceňovania, ktorý je základným princípom pri oceňovaní finančných aktív. Zadefinujeme si jeho stručnú charakteristiku a na tom základe si ukážeme niektoré jeho vlastnosti. Ďalej sa budeme venovať modelom krátkodobých sadzieb a prevažne ich diskrétnym verziám, kde sa zameráme predovšetkým na Ho-Leeho model. Na jeho podstate predvedieme kalibrovanie binomického stromu. V závere práce si pomocou tohoto modelu ukážeme oceňovanie rôznych druhov úrokových opcií ako capu alebo bariérovej opcie. Na ocenenie opcií a kalibráciu binomického stromu použijeme matematický software Mathematica.

Klíčová slova: binomický model, oceňovanie, úrokové opcie, Ho-Leeho model

Title: Interest rate options and their pricing in binomial model

Author: Martin Ondruš

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Lenka Slámová MSc, Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This work discusses about binomial pricing model, which is the basic principle for pricing of any kind of financial assets. We define its brief definition and show its main characteristics. Next, this work discusses about models of the short rate, especially to their discrete versions. From this set of models, we choose one of the most important interest rate models, which is Ho-Lee model and we look at it in details. According to its basis we interpret calibrating of binomial tree. Finally, we perform how to price different kinds of interest rate options such as caps or barrier options according to Ho-Lee model as well. We use mathematical software Mathematica for pricing options and calibrating of binomial tree.

Keywords: binomial model, pricing, interest rate options, Ho-Lee model

Obsah

Úvod

Základným prístupom pri oceňovaní finančných aktív je binomický oceňovací model. Pomocou tohto modelu sa v súčasnosti oceňujú najrozličnejšie druhy finančných derivátov. Binomickým modelom sa snažíme odhadnúť budúci vývoj sledovanej veličiny na základe momentálnych dát. Tento vývoj v binomickom strome je sprevádzaný určením pravdepodobnosti, s akou bude veličina rásť a s jej doplnkom do jednej naopak klesať v jednotlivých sledovaných budúcich okamihoch.

Zákonitosťami, ktoré platia v binomickom modeli, sa zaoberali Thomas S.Y. Ho a Sang-Bin Lee v [6], ktorí nimi navrhnutý bezarbitrážny model krátkodobých sadzieb aplikovali do kalibrovaného binomického stromu. Neskôr, John C. Hull a Alan White prišli s ďalším modelom krátkodobých sadzieb, ktorý však už bol nimi aplikovaný do zložitejšieho trinomického stromu. John C. Hull však v obsiahlej knihe [3] opísal obecné základné princípy, ktoré platia v binomickom modeli pri oceňovaní najrôznejších finančných derivátov a taktiež zhrnul a charakterizoval dovtedy známe modely krátkodobých sadzieb. Zhrnutie výsledkov o oceňovaní pomocou binomického modelu je možné nájsť v [2]. Steven E. Shreve v tomto diele prezentoval najrozličnejšie vzťahy, ktoré v binomickom modeli platia a predovšetkým ďalej rozviedol, ako sa v rizikovo neutrálnom svete oceňujú obligácie, opcie a iné finančné deriváty.

Táto práca spočíva v načrtnutí základných charakteristík binomického modelu v bezarbitrážnej oceňovacej teórii a vzťahov v ňom platiacich. V druhej kapitole prezentujeme modely krátkodobých sadzieb, ktorých vývoj sa kalibruje do stromov a upriamujeme sa detailne na Ho-Leeho model. V tretej kapitole sa už zameriavame konkrétne na binomický model pre úrokové sadzby a následne na oceňovanie aktív závislých na úrokových sadzbách. Tieto poznatky vo štvrtej kapitole detailne prezentujem na príkladoch oceňovania niektorých druhov opcií uzavretých na podkladové aktíva, ktorých hodnota je závislá na nejakej úrokovej sadzbe (PRIBOR, LIBOR, EURIBOR,...). Konkrétne teda, ukážeme oceňovanie úrokových opcií v binomickom modeli.

1. Binomický oceňovací model

1.1 Základné definície

Binomický oceňovací model aktív predstavuje hodnotný nástroj pre pochopenie bezarbitrážnej oceňovacej teórie a pravdepodobnosti. V tejto podkapitole si zavedieme potrebné definície pojmov nevyhnutných pre neskoršie pochopenie a predstavenie binomického modelu a spôsobu oceňovania s jeho využitím.

Definícia 1. *Arbitráž je obchodovacia stratégia, ktorá začína s nulovými peňažnými prostriedkami, má nulovú pravdepodobnosť straty peňazí a kladnú pravdepodobnosť ich zarobenia. Arbitráž matematicky definujeme ako* $P(V_t \geq 0) = 1$ *a* $P(V_t \neq 0) > 0$*, kde* $V_0 = 0$ *a* V_t *značí hodnotu nášho portfólia v čase* t*.*

Typickým a najjednoduchším príkladom arbitráže je nakúpenie identického tovaru na jednom trhu a predanie na druhom za rôzne ceny.

Definícia 2. *Finančný derivát predstavujúci termínovaný kontrakt, pri ktorom jeden z účastníkov získava právo (nie povinnosť) uskutočniť obchod s podkladovým aktívom za vopred dohodnutú realizačnú cenu, sa nazýva* opcia*. Hovoríme, že účastník majúci toto právo, či už predaja alebo nákupu, je v tzv.* dlhej pozícii *(long) a upisovateľ je v tzv.* krátkej pozícii *(short).*

Delenie opcií:

- podľa existencie práva majiteľa kúpiť alebo predať aktívum:
  - *opcia na kúpu (call opcia)* - účastník v dlhej pozícii má právo kúpy aktíva za vopred dohodnutú sumu a upisovateľ opcie má následne povinnosť mu aktívum predať
  - *opcia na predaj (put opcia)* - účastník v dlhej pozícii má právo predaja aktíva za vopred dohodnutú sumu a upisovateľ opcie má následne povinnosť od neho aktívum kúpiť
- podľa určenia termínu plnenia:
  - *európska opcia* - realizácia opcie je možná len k dátumu splatnosti
  - *americká opcia* - realizácia opcie je možná aj kedykoľvek pred dátumom splatnosti

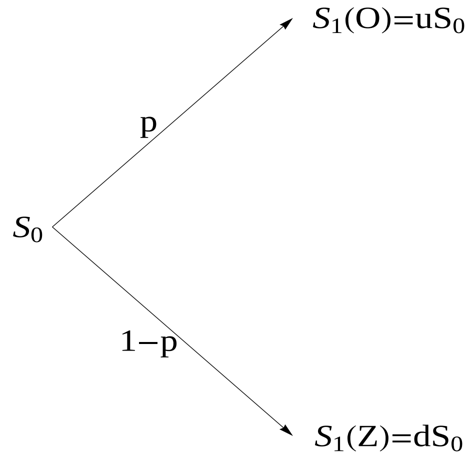
Definícia 3. *Bezkupónovou obligáciou rozumieme dlhopis, ktorý emitentovi dáva povinnosť vyplatiť majiteľovi dlhopisu umorovaciu hodnotu (často rovnú nominálnej hodnote obligácie) po uplynutí doby splatnosti.*

1.2 Binomický model

1.2.1 Jednoperiodický binomický model

V tejto podkapitole budeme uvažovať najjednoduchší binomický model, ktorý má len jednu periódu. Tento model bude v nasledujúcej podkapitole zovšeobecnený do viac skutočnejšieho a v praxi využívanejšieho multiperiodického binomického modelu. Prezentujeme model, ktorý opísal Steven E. Shreve v [2].

V obecnom jednoperiodickom modeli znázornenom na obrázku 1.1 nazývame začiatok periódy čas nula a koniec periódy čas jedna. V čase nula máme akciový kapitál, ktorého cenu za akciu označíme S_0. Predpokladáme, že $S_0 > 0$ a je to pre nás známa hodnota. V čase jedna bude cena akcie buď $S_1(O)$ alebo $S_1(Z)$, kde O značí orol a Z znak. Obe sú to kladné hodnoty. Predstavujeme si teda, že hádžeme mincou (nemusí byť súmerná), kedy pravdepodobnosť, že padne orol je p a pravdepodobnosť, že padne znak je $1-p$, $0 < p < 1$. To značí, že cena akcie sa v čase jedna zmení na $S_1(O)$ s pravdepodobnosťou p a na $S_1(Z)$ s pravdepodobnosťou $1-p$.



Obr. 1.1: Jednoperiodický binomický model

Pre pomerný rast alebo pokles ceny si zavádzame premenné u (horný faktor) a d (dolný faktor), ktoré sú definované ako

$$u = \frac{S_1(O)}{S_0},\ d = \frac{S_1(Z)}{S_0}$$

Predpokladáme, že $d < u$. Ak $d = u$, tak cena akcie v čase jedna nie je náhodná a model prestáva byť pre nás zaujímavý. Z pomenovania premenných ako horný a dolný faktor ďalej predpokladáme, že $u > 1$ a $d < 1$.

Ďalej zavádzame úrokovú sadzbu r. Konkrétne, úroková sadzba na požičanie si je rovnaká ako úroková sadzba pre investovanie na peňažnom trhu. Skoro vždy môžme ďalej predpokladať, že $r \geq 0$, ale pre formálnu matematickú presnosť bude náš model vyžadovať len, aby $r > -1$.

Pre vylúčenie arbitráže v jednoperiodickom binomickom modeli musíme usudzovať, že

$$0 < d < 1 + r < u. \tag{1.1}$$

Nerovnosť $d > 0$ plynie z toho, že $S_1(Z)$ je kladná hodnota. Ostatné dve nerovnosti v rovnici (1.1) plynú z predpokladu vylúčenia arbitráže. Ak by platilo, že $d \geq 1+r$, tak by bolo možné začať s nulovým bohatstvom v čase nula a požičať si z peňažného trhu na kúpu akciového kapitálu. Aj v najhoršom prípade a poklesu ceny v čase jedna na dS_0, by sme po predaji akciového kapitálu a vyplatenia dlhu, skončili na nule alebo zarobili. Nastala arbitráž, kedy s nulovou pravdepodobnosťou prerobíme. Ak by platilo, že $u \leq 1 + r$, tak by sme postupovali opačnou stratégiou.

Pre lepšie znázornenie a vyjadrenie ceny akciového kapitálu v čase jedna, budeme uvažovať ďalej európsku opciu, ktorá zaručuje majiteľovi právo kúpiť jednu akciu kapitálu v čase jedna za realizačnú cenu K. Predpokladáme, že

$$S_1(Z) < K < S_1(O),$$

ostatné prípady sú pre nás nezaujímavé, pretože, buď by sa v čase jedna realizovala opcia v oboch prípadoch, alebo v žiadnom. V našom prípade môžme povedať, že opcia má v čase jedna hodnotu

$$(S_1 - K)^+ = max\,(S_1 - K, 0).$$

S_1 značí nadobudnutú cenu v čase jedna, teda buď $S_1(Z)$ alebo $S_1(O)$. $V_1(O)$ označíme hodnotu opcie v čase jedna pre nadobnudnuté $S_1(O)$ a $V_1(Z)$ pre $S_1(Z)$.

Aby sme mohli určiť hodnotu opcie V_0 v čase nula, replikujeme opciu obchodovaním s akciovým kapitálom a peňažným trhom. Predpokladáme, že začíname s počiatočným bohatstvom X_0 a kúpime Δ_0 akcií v čase nula, čo nás necháva v pozícii $X_0 - \Delta_0 S_0$. Tým pádom hodnota nášho portfólia akciového kapitálu a účtu na peňažnom trhu v čase jedna bude

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1 + r)(X_0 - \Delta_0 S_0).$$

Naším cieľom je určiť X_0 a Δ_0, aby $X_1(O) = V_1(O)$ a $X_1(Z) = V_1(Z)$. Replikácia opciou teda vyžaduje, aby

$$X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} S_1(O) - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} V_1(O), \tag{1.2}$$

$$X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} S_1(Z) - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} V_1(Z). \tag{1.3}$$

Odpočítaním rovnice (1.3) od rovnice (1.2) dostávame vzorec pre Δ_0

$$\Delta_0 = \frac{V_1(O) - V_1(Z)}{S_1(O) - S_1(Z)} \tag{1.4}$$

Vynásobením rovnice (1.2) $\hat{p}$ a rovnice (1.3) $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ a ich pričítaním dostávame rovnicu

$$X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} [\hat{p} S_1(O) + \hat{q} S_1(Z)] - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} [\hat{p} V_1(O) + \hat{q} V_1(Z)] \tag{1.5}$$

Volíme $\hat{p}$, aby

$$S_0 = \frac{1}{1+r} [\hat{p} S_1(O) + \hat{q} S_1(Z)] \tag{1.6}$$

Potom v (1.5) násobime na ľavej strane Δ_0 s nulovým výrazom v zátvorke a dostávame jednoduchý vzorec pre X_0:

$$X_0 = \frac{1}{1+r} [\hat{p} V_1(O) + \hat{q} V_1(Z)]. \tag{1.7}$$

Rovnicu (1.6) ďalej vieme rozpísať ako

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\left[\hat{p}uS_0 + (1-\hat{p})dS_0\right] = \frac{S_0}{1+r}[(u-d)\hat{p}+d].$$

Tento rozpis vedie k vyjadreniu rizikovo neutrálnych pravdepodobností $\hat{p}$ a $\hat{q}$ v tvaroch

$$\hat{p} = \frac{1-r-d}{u-d},\ \hat{q} = \frac{u-1-r}{u-d}.$$

Ak teda začíname v čase nula s bohatstvom X_0 vyjadreným v rovnici (1.7) a kúpime Δ_0 akcií z kapitálu vyjadreným rovnicou (1.4), tak potom v čase jedna budeme mať portfólio s hodnotou $V_1(O)$ alebo $V_1(Z)$ podľa toho, ako sa zmení cena za akciu. V oboch prípadeoch si zaistíme krátku pozíciu v opcii, ktorá by v čase nula mala mať cenu

$$V_0 = \frac{1}{1+r}[\hat{p}V_1(O) + \hat{q}V_1(Z)], \tag{1.8}$$

aby zachovala bezarbitrážny stav. V inom čase ako nula, by táto cena viedla k možnosti arbitráže.

1.2.2 Multiperiodický binomický model

V tejto podkapitole rozšírime myšlienky z podkapitoly 1.2.1 do modelu s viacerými periódami. Predstavujeme si tentokrát, že opakovane hádžeme mincou a kedykoľvek, keď padne orol, cena akciového kapitálu vzrastie a ak znak tak klesne. Predpokladáme, že dolný faktor a horný faktor sú po celú dobu rovnaké. V čase dva teda cena môže nadobudnúť štyri rôzne hodnoty

$$S_2(OO) = uS_1(O) = u^2S_0,\ S_2(OZ) = dS_1(O) = duS_0,$$

$$S_2(ZZ) = dS_1(Z) = d^2S_0,\ S_2(ZO) = uS_1(Z) = duS_0,$$

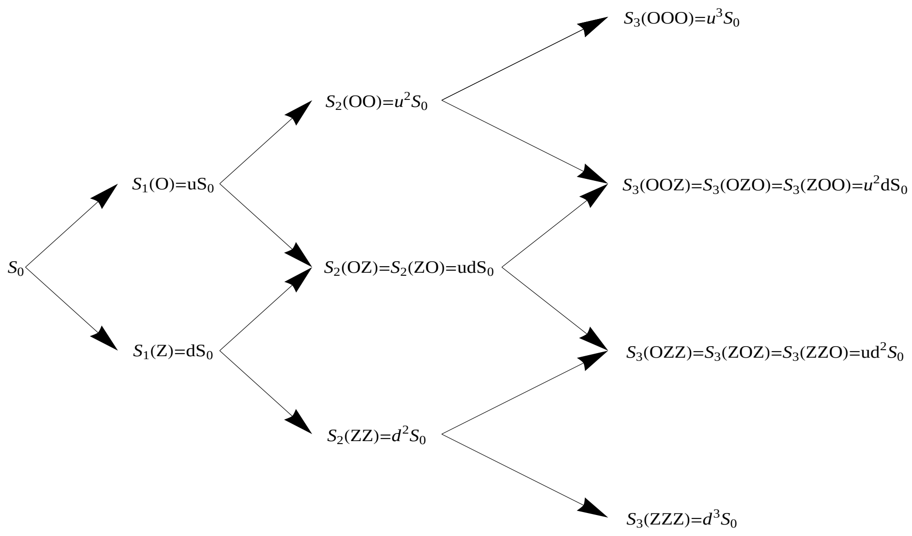
kde $S_2(OO)$ značí, že cena vzrástla v čase jedna aj dva (dvakrát padol orol) a podobne.

V čase tri existuje osem rôznych trajektórií vývoja cien kapitálu, avšak nie všetky končia rôznymi cenami (viď obrázok 1.2). Takto by sme mohli postupovať v konštruovaní multiperiodického modelu ďalej.

Uvažujme pre názornosť Európsku call opciu s dátum splatnosti $N \geq 2$. Opäť chceme určiť bezarbitrážnu cenu opcie v čase nula. Určuje sa opakovaným aplikovaním princípov z podkapitoly 1.2.1. Totiž, cena opcie v konečných uzloch stromu (v čase splatnosti) je ľahko vypočitateľná, pretože sa rovná výplate opcie, tj. $V_N = (S_N - K)^+$. Princípom spätného použitia vzorca (1.8) sa vieme dostať až do času nula, kde chceme určiť bezarbitrážnu cenu.

Majme konkrétne N=2 a bezrizikovú úrokovú mieru r. Aplikovaním vzorca (1.8) dostávame v čase jedna

$$\begin{aligned} V_1(O) &= \frac{1}{1+r}[\hat{p}V_2(OO) + \hat{q}V_2(OZ)], \\ V_1(Z) &= \frac{1}{1+r}[\hat{p}V_2(ZO) + \hat{q}V_2(ZZ)]. \end{aligned} \tag{1.9}$$



Obr. 1.2: Všeobecný trojperiodický model

Ďalej zo vzorca (1.8) a nahradením výrazov z rovníc (1.9) dostávame bezarbitrážnu cenu opcie v čase nula ako

$$V_0 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 [\hat{p}^2 V_2(OO) + 2\hat{p}\hat{q}V_2(OZ) + \hat{q}^2 V_2(ZZ)].$$

Premenné $\hat{p}^2$, $2\hat{p}\hat{q}$, $\hat{q}^2$ sú pravdepodobnosti dosiahnutia jednotlivých (horný, stredný, dolný) uzlov v čase dva, viď obrázok 1.2. Cena opcie je teda rovná očakávanej hodnote výplaty v bezrizikovom prostredí diskontovanej bezrizikovou úrokovou mierou.

Pridávaním a rozširovaním modelu o ďalšie periódy, princíp vyššie uvedeného oceňovania stále platí a cena opcie je stále rovná očakávanej hodnote výplaty v bezrizikovom prostredí diskontovanej bezrizikovou úrokovou mierou. Vieme tak zostaviť spätnú rekurzívnu rovnicu pre N-periodický model.

Nech V_N je náhodná veličina závislá na prvých N hodoch $\omega_1\omega_2..\omega_N$. Definujeme rekurzívne postupnosť náhodných premenných V_{N-1},V_{N-2},…,V_0, určujúcich cenu opcie v jednotlivých časoch obecným vzorcom

$$V_n(\omega_1\omega_2..\omega_n) = \frac{1}{1+r}[\hat{p}V_{n+1}(\omega_1\omega_2..\omega_n O) + \hat{q}V_{n+1}(\omega_1\omega_2..\omega_n Z)],\ n = 0, 1, ..., N-1.$$

Taktiež si odvodením zo vzorca 1.4 podobne definujeme postupnosť Δ_n, pre ktorú platí

$$\Delta_n(\omega_1\omega_2..\omega_n) = \frac{V_{n+1}(\omega_1\omega_2..\omega_n O) - V_{n+1}(\omega_1\omega_2..\omega_n Z)}{S_{n+1}(\omega_1\omega_2..\omega_n O) - S_{n+1}(\omega_1\omega_2..\omega_n Z)},\ n = 0, 1, ..., N-1.$$

Definícia 4. *Nech X je náhodná veličina definovaná na konečnom pravdepodobnostnom priestore (Ω, P). Stredná hodnota X je definovaná ako*

$$EX = \sum_{w\in\Omega} X(\omega)P(\omega).$$

Ak rátame strednú hodnotu použitím rizikovo neutrálne pravdepodobnostnej miery $\hat{P}$, tak dostávame

$$\hat{E}X = \sum_{w\in\Omega} X(\omega)\hat{P}(\omega).$$

Definícia 5. *Nech $\hat{P}$ je pravdepodobnostná miera na priestore Ω všetkých možných postupností N hodov mincou. Predpokladajme, že každá postupnosť $\omega_1\omega_2...\omega_N$ v Ω má kladnú pravdepodobnosť pri miere $\hat{P}$. Nech pre n platí, že $1 \leq n \leq N$ a nech $\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2...\bar{\omega}_n$ je postupnosť N hodov mincou. Definujeme*

$$\hat{P}\{\omega_{n+1} = \bar{\omega}_{n+1}, ..., \omega_N = \bar{\omega}_N | \omega_1 = \bar{\omega}_1, ..., \omega_n = \bar{\omega}_n\} = \frac{\hat{P}\{\omega_1 = \bar{\omega}_1, ..., \omega_N = \bar{\omega}_N\}}{\hat{P}\{\omega_1 = \bar{\omega}_1, ..., \omega_n = \bar{\omega}_n\}}.$$

Nech X je náhodná veličina. Definujeme podmienenú strednú hodnotu X založenú na informácii v čase n vzorcom

$$\hat{E}_n[X](\bar{\omega}_1...\bar{\omega}_n) = \sum_{\bar{\omega}_{n+1}...\bar{\omega}_N} X(\bar{\omega}_1...\bar{\omega}_n\bar{\omega}_{n+1}...\bar{\omega}_N)$$
$$\times \hat{P}\{\omega_{n+1} = \bar{\omega}_{n+1}, ..., \omega_N = \bar{\omega}_N | \omega_1 = \bar{\omega}_1, ..., \omega_n = \bar{\omega}_n\}.$$

Ďalej stanovujeme $\hat{E}_0[X] = \hat{E}X$ a $\hat{E}_N[X] = X$

Definícia 6. *Nech n spĺňuje $1 \leq n \leq N$ a nech $\omega_1\omega_2...\omega_n$ je pre daný moment fixné. Potom existuje 2^{N-n} možných pokračovaní $\omega_{n+1}\omega_{n+2}...\omega_N$ fixnej postupnosti $\omega_1\omega_2...\omega_n$. Označme $\#O(\omega_{n+1}\omega_{n+2}...\omega_N)$ počet orlov v pokračovaní $\omega_{n+1}\omega_{n+2}...\omega_N$ a $\#Z(\omega_{n+1}\omega_{n+2}...\omega_N)$ počet znakov. Definujeme*

$$\hat{E}_n[X](\omega_1\omega_2...\omega_n) = \sum_{\omega_{n+1}...\omega_N} \hat{p}^{\#O(\omega_{n+1}\omega_{n+2}...\omega_N)}\hat{q}^{\#Z(\omega_{n+1}\omega_{n+2}...\omega_N)}X(\omega_1...\omega_n\omega_{n+1}...\omega_N)$$

a nazývame $\hat{E}_n[X]$ podmienenou strednou hodnotou X založenej na informácii v čase n.

Analogicky (ako V_n) môžme vyjadriť aj postupnosť cien akciového kapitálu S_n pre každú postupnosť $\omega_1...\omega_n$ ako

$$S_n(\omega_1\omega_2...\omega_n) = \frac{1}{1+r}[\hat{p}S_{n+1}(\omega_1\omega_2...\omega_n O) + \hat{q}S_{n+1}(\omega_1\omega_2...\omega_n Z)], \qquad (1.10)$$

tj. cena akciového kapitálu v čase n je diskontovaným váženým priemerom dvoch možných cien kapitálu v čase $n+1$, kde $\hat{p}$ a $\hat{q}$ sú váhy použité pri spriemerovaní. Pre zjednodušenie definujeme

$$\hat{E}_n[S_{n+1}](\omega_1...\omega_n) = \hat{p}S_{n+1}(\omega_1...\omega_n O) + \hat{q}S_{n+1}(\omega_1...\omega_n Z)$$

a vzorec (1.10) vieme prepísať ako

$$S_n = \frac{1}{1+r}\hat{E}_n[S_{n+1}].$$

Definícia 7. *Uvažujme binomický model oceňovania aktív. Nech $M_0, M_1, ..., M_N$ je postupnosť náhodných veličín, kde každé M_n závisí len na prvých n hodoch mincou (M_0 je konštanta). Takúto postupnosť náhodných veličín nazývame* adaptovaným *stochastickým procesom.*
(i) Ak

$$M_n = E_n[M_{n+1}],\ n = 0, 1, ..., N-1,$$

tak nazývame tento proces martingal.
(ii) Ak

$$M_n \leq E_n[M_{n+1}],\ n = 0, 1, ..., N-1,$$

tak nazývame tento proces submartingal.
(iii) Ak

$$M_n \geq E_n[M_{n+1}],\ n = 0, 1, ..., N-1,$$

tak nazývame tento proces supermartingal.

V multiperiodickom binomickom modeli s N hodmi mincou teda opäť uvažujme, že v čase n máme Δ_n akcií až do času $n+1$, kedy vstupujeme do novej pozície s Δ_{n+1} akciami. Tento portfóliový proces $\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_{N-1}$ je adaptovaný (podľa definície 7), pretože v každom čase n závisí Δ_n len na prvých n hodoch mincou. V každom čase ďalej vyvažujeme naše portfólio podľa toho, či si potrebujeme požičiať alebo investovať na peňažnom trhu. Ak teda začíname v čase nula s počiatočným bohatstvom X_0, tak v čase n vieme vyjadriť naše bohatstvo X_n ako

$$X_n = \Delta_{n-1}S_n + (1+r)(X_{n-1} - \Delta_{n-1}S_{n-1}),\ n = 0, 1, ..., N-1. \tag{1.11}$$

Každé X_n závisí iba na prvých n hodoch mincou a teda $X_0, X_1, ..., X_{N-1}$ je taktiež adaptovaný proces. Nasledujúca veta aj s dôkazom je uvedená v [2].

Veta 1. *Uvažujme binomický model s N periódami. Nech $\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_{N-1}$ je adaptovaný proces portfólia. Ďalej nech $X_0 \in \mathbb{R}$ a nech proces bohatstva $X_1, ..., X_N$ je generovaný rekurzívne rovnicou* (1.11)*. Potom diskontovaný proces bohatstva $\frac{X_n}{(1+r)^n}$, $n = 0, 1, ..., N$, je martingal pri rizikovo neutrálnej miere, tj.*

$$\frac{X_n}{(1+r)^n} = \hat{E}_n\left[\frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right],\ n = 0, 1, ..., N-1.$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned}
\hat{E}_n\left[\frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1+}}\right] &= \hat{E}_n\left[\frac{\Delta_n S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n}\right] \\
&(linearita) \\
&= \hat{E}_n\left[\frac{\Delta_n S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] \hat{E}_n\left[\frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n}\right] \\
&(vyňatie\ toho,\ čo\ poznáme) \\
&= \Delta_n \hat{E}_n\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n} \\
&(z\ definície\ S_n) \\
&= \Delta_n \frac{S_n}{(1+r)^n} + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n} \\
&= \frac{X_n}{(1+r)^n}.
\end{aligned}$$

$\square$

2. Ho-Leeho model úrokových sadzieb

2.1 Modely krátkodobých sadzieb

Definícia 8. *Krátkodobou sadzbou, r_t, rozumieme úrokovú sadzbu, ktorá sa vzťahuje na nekonečne krátku periódu času v čase t.*

Modelom krátkodobých sadzieb rozumieme matematický model, ktorý popisuje budúci vývoj úrokových sadzieb na základe budúceho vývoja krátkodobých sadzieb.

V tejto práci nebudeme ďalej pojednávať rovnovážne modely krátkodobých sadzieb, pretože nie sú automaticky nafitované na dnešnú časovú štruktúru a môžu viesť k arbitrážam. Predovšetkým, väčšina súčasných obchodníkov ich považuje za neuspokojivé, pretože parametre modelov sa nevolia presne, ale len približne a tým v niektorých prípadoch spôsobujú významné chyby. Pre príklad, jednopercentná chyba v cene podkladovej obligácie môže viesť až ku chybe v ocenení opcie o 25 percent. V krátkosti si zavedieme aspoň ich definíciu.

Definícia 9. *Rovnovážny model je matematický model, ktorý zvyčajne začína s istými predpokladmi ohľadom ekonomických veličín a od toho odvodzuje proces pre krátkodobú sadzbu r. Ďalej zisťuje, čo proces pre r implikuje o cenách obligácií a opcií. Pre ďalšie ich vlastnosti a delenie viď [3].*

Definícia 10. *Bezarbitrážny model je model krátkodobých sadzieb navrhnutý tak, aby bol presne zhodný so súčasnou časovou štruktúrou úrokových sadzieb.*

Najvýznamnejšou výhodou bezarbitrážnych modelov v porovnaní s rovnovážnymi je, že časová štruktúra úrokových sadzieb je pre model vstupom a nie výstupom. Ďalej budeme teda pojednávať iba bezarbitrážne modely a predovšetkým Ho-Leeho model.

2.2 Ho-Leeho model

Ho-Leeho model je prvým bezarbitrážnym modelom krátkodobých sadzieb navrhnutým v [6]. Thomas Ho a Sang Bin Lee uviedli tento model vo forme binomického stromu cien obligácií s dvomi parametrami: štandardnou odchýlkou krátkodobej sadzby a tržnou cenou rizika krátkodobej sadzby. Model berie časovú štruktúru ako danú (hlavne výnosovú krivku) a od toho odvádza prípustné ďalšie pohyby časových štruktúr. Jeho hlavnou výhodou je, že využíva plnú informáciu danej štruktúry pre oceňovanie. Časovo spojitý model má tvar

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz, \tag{2.1}$$

kde σ, štandardná okamžitá odchýlka krátkodobej sadzby, je konštanta a $\theta(t)$ je funkcia času určená k tomu, aby model odpovedal počiatočnej časovej štruktúre. Definuje priemerný smer, ktorým sa r bude v čase r pohybovať nezávisle na veľkosti r. Premenná z označuje veličinu, ktorá sa riadi Wienerovým procesom.

Definícia 11. *Nech z označuje premennú, ktorej hodnota sa spojito mení. Zmenu hodnoty premennej z za časový interval Δt označme Δz. Premenná z sa riadi Wienerovým procesom, ak*

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t},$$

kde ε je z $N(0,1)$. Hodnoty Δz sú nezávislé pre rôzne (neprekrývajúce) periódy času.

Vlastnosti Wienerovho procesu:

- $E[z(T) - z(0)] = 0$
- $var[z(T) - z(0)] = T$

Premennú $\theta(t)$ môžeme analyticky vyjadriť v tvare

$$\theta(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(0,t) + \sigma^2 t,$$

kde $F(0,t)$ je okamžitá forwardová sadzba pre splatnosť t v čase 0. Ako aproximáciu $\theta(t)$ je teda možné použiť $\frac{\partial F}{\partial t}(0,t)$ (výraz $\sigma^2 t$ je v porovnaní s ním veľmi malý). To znamená, že priemerný smer, ktorým sa krátkodobá sadzba bude v budúcnosti pohybovať je približne rovný smernici okamžitej forwardovej krivky.

Pomocou Ho-Leeho modelu je možné oceniť analyticky bezkupónové obligácie a európske opcie na kupónové obligácie (viď [3]). V čase t je cena bezkupónovej obligácie, ktorá vypláca čiastku 1 v čase T, vyjadrená pomocou krátkodobej sadzby ako

$$B_{t,T} = A(t,T)e^{-r(t)(T-t)}, \tag{2.2}$$

kde

$$lnA(t,T) = ln\frac{B_{0,T}}{B_{0,t}} - (T-t)\frac{\partial lnB_{0,t}}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 t(T-t)^2.$$

Čas nula považujeme za dnešok, časy t a T sú ľubovoľné časy v budúcnosti, kde $T \geq t$. Rovnicou (2.2) teda definujeme cenu bezkupónových obligácií v čase t pomocou krátkodobej sadzby $r(t)$ a cien obligácií dnes.

Označme úrokovú sadzbu v čase t pre obdobie Δt ako $R(t)$. Z rovnice (2.2) ďalej dostávame

$$B_{t,T} = \hat{A}(t,T)e^{-R(t)(T-t)}, \tag{2.3}$$

kde

$$ln\hat{A}(t,T) = ln\frac{B_{0,T}}{B_{0,t}} - \frac{T-t}{\Delta t}\frac{B_{0,t+\Delta t}}{B_{0,t}} - \frac{1}{2}\sigma^2 t(T-t)[(T-t) - \Delta t. \tag{2.4}$$

Rovnice (2.3) a (2.4) zahŕňajú iba ceny obligácií v čase nula, už žiadne ich parciálne derivácie. Tým môžme ukázať, že nie je nutné, aby vstupná časová štruktúra bola diferencovateľná pre potreby Ho-Leeho modelu.

3. Binomický model pre úrokové sadzby

3.1 Oceňovanie aktív závislých na úrokových sadzbách

Definícia 12. *Nech Ω je množina 2^N možných výsledkov $\omega_1\omega_2...\omega_N$ N hodov mincou a nech $\hat{P}$ je pravdepodobnostná miera na Ω, kde každá postupnosť $\omega_1\omega_2...\omega_N$ má kladnú pravdepodobnosť. Definujeme proces* úrokových sadzieb *na obdobie o dĺžke Δt ako postupnosť náhodných veličín*

$$R_0, R_1, ..., R_{N-1},$$

kde R_0 nie je náhodné a pre každé $n = 1, ..., N-1$, R_n závisí iba na prvých n hodoch mincou $\omega_1\omega_2...\omega_n$.

Ďalej zavedieme definíciu diskontného faktoru. Na rozdiel od [2] budeme uvažovať spojité úročenie.

Definícia 13. *Za rovnakých predpokladov ako v definícii 12 definujeme* diskontovaný proces *ako*

$$D_n = I_0 \times I_1 \times ... \times I_{n-1},\ n \geq 1. \tag{3.1}$$

kde $I_i = e^{-R_i \Delta t}$, $i \geq 0$.

Prirodzene uvádzame, že $R_n > 0$ pre všetky n a pre všetky $\omega_1\omega_2...\omega_n$, ale ďalšie analýzy vyžadujú len, aby

$$R_n(\omega_1\omega_2...\omega_n) > -1. \tag{3.2}$$

Podľa rizikovo neutrálnej oceňovacej rovnice hodnota v čase nula platby X obdržanej v čase m (kde X je povolené, aby záviselo iba na $\omega_1...\omega_m$) je

$$\hat{E}[D_m X]$$

stredná hodnota rizikovo neutrálnej diskontovanej platby. Tento vzorec ďalej použijeme pre zavedenie hodnoty v čase nula bezkupónovej obligácie, ktorá vypláca čiastku 1 v dátume splatnosti m ako

$$B_{0,m} = \hat{E}[D_m] \tag{3.3}$$

Výnos tejto obligácie, je y_m, pre ktoré platí

$$\frac{1}{B_{0,m}} = (1 + y_m)^m.$$

Konkrétne pre vyjadrené y_m dostávame

$$y_m = \left(\frac{1}{B_{0,m}}\right)^{\frac{1}{m}} - 1.$$

Definícia 14. *Nech $\hat{P}$ je pravdepodobnostná miera na priestore Ω všetkých možných postupností N hodov mincou. Predpokladajme, že každá postupnosť $\omega_1\omega_2...\omega_N$ v Ω má kladnú pravdepodobnosť na miere $\hat{P}$. Nech $R_0, R_1, ..., R_{N-1}$ je proces úrokových sadzieb, kde každé R_n záleží len na prvých n hodoch a splňuje (3.2). Majme diskontovaný proces D_n, $n = 0, 1, ..., N$ daný (3.1). Pre $0 \leq n \leq m \leq N$ je cena v čase n bezkupónovej obligácie splatnej v čase m definovaná ako*

$$B_{n,m} = \hat{E}_n\left[\frac{D_m}{D_n}\right]. \tag{3.4}$$

Podľa vzorca (3.4) cena v čase m bezkupónovej obligácie so splatnosťou v čase m je $B_{m,m} = 1$. Berieme nominálnu hodnotu rovnú jednej ako vhodnú normalizáciu. Ak je nominálna hodnota iná (označme C), potom hodnota obligácie v čase n pred splatnosťou m je $CB_{n,m}$. Ak $n = 0$ potom vzorec (3.4) sa redukuje na (3.3). Vo vzorci (3.4) ďalej môžme využiť jednu z vlastností strednej hodnoty a vyňať to, čo na prvých n hodoch nezáleží a je známe. Dostávame tak, že

$$D_n B_{n,m} = \hat{E}_n[D_m]. \tag{3.5}$$

Teraz si ukážeme, že diskontované ceny bezkupónových obligácií tvoria martingal.

Veta 2. *Diskontované ceny bezkupónových obligácií tvoria martingal.*

Dôkaz. Najprv nech $n \leq N-2$. Definícia 7 pre martingal implikuje, že

$$M_{n+1} = E_{n+1}[M_{n+2}].$$

Pre $0 \leq k \leq n \leq m$ z rovnice (3.5) a s použitím vlastností podmienenej strednej hodnoty chceme dokázať, že

$$\hat{E}_k[D_n B_{n,m}] = D_k B_{k,m}.$$

Označme $Z = \hat{E}_n[D_m]$. Potom Z závisí práve na $\omega_1\omega_2...\omega_n$. Píšme

$$\begin{aligned}
\hat{E}_k[\hat{E}_n[D_m]](\omega_1...\omega_k) &= \hat{E}_k[Z](\omega_1...\omega_k) \\
&= \sum_{\omega_{k+1}...\omega_m} \hat{p}^{\#O(\omega_{k+1}...\omega_m)}\hat{q}^{\#Z(\omega_{k+1}...\omega_m)} Z(\omega_1...\omega_k\omega_{k+1}...\omega_m) \\
&= \sum_{\omega_{k+1}...\omega_n} \hat{p}^{\#O(\omega_{k+1}...\omega_n)}\hat{q}^{\#Z(\omega_{k+1}...\omega_n)} Z(\omega_1...\omega_n) \\
&\quad \times \sum_{\omega_{n+1}...\omega_m} \hat{p}^{\#O(\omega_{n+1}...\omega_m)}\hat{q}^{\#Z(\omega_{n+1}...\omega_m)} \\
&= \sum_{\omega_{k+1}...\omega_n} \hat{p}^{\#O(\omega_{k+1}...\omega_n)}\hat{q}^{\#Z(\omega_{k+1}...\omega_n)} Z(\omega_1...\omega_n) \\
&= \sum_{\omega_{k+1}...\omega_n} \hat{p}^{\#O(\omega_{k+1}...\omega_n)}\hat{q}^{\#Z(\omega_{k+1}...\omega_n)} \\
&\quad \times \sum_{\omega_{n+1}...\omega_m} \hat{p}^{\#O(\omega_{n+1}...\omega_m)}\hat{q}^{\#Z(\omega_{n+1}...\omega_m)} D_m(\omega_1...\omega_m) \\
&= \sum_{\omega_{k+1}...\omega_m} \hat{p}^{\#O(\omega_{k+1}...\omega_m)}\hat{q}^{\#Z(\omega_{k+1}...\omega_m)} D_m(\omega_1...\omega_m) \\
&= \hat{E}_k[D_m](\omega_1...\omega_k)
\end{aligned}$$

Dostávame tak

$$\hat{E}_k[D_n B_{n,m}] = \hat{E}_k[\hat{E}_n[D_m]] = \hat{E}_k[D_m] = D_k B_{k,m},$$

čo sme chceli dokázať. □

Uvažujme, že v čase nula máme nenáhodné bohatstvo hodnoty X_0 a chceme obchodovať s bezkupónovými obligáciami s rôznymi dátumami splatnosti a na peňažnom trhu. Ukážeme, že diskontované hodnoty nášho bohatstva $X_0, X_1, ..., X_N$ tvoria martingal a z toho vyvodíme, že sa v modeli, v ktorom sú bezkupónové obligácie definované rovnicou (3.4), nenachádza možnosť arbitráže. Konkrétne, nech $\Delta_{n,m}$ značí počet bezkupónových obligácií s dátum splatnosti m, ktoré vlastníme medzi časmi n a $n+1$. Musí teda platiť $n < m$. Ďalej, $\Delta_{n,m}$ závisí iba na prvých n hodoch mincou a nech $\Delta t = 1$. Hodnotu nášho bohatstva v čase $n+1$ môžme vyjadriť v tvare

$$X_{n+1} = \Delta_{n,n+1} \sum_{m=n+2}^{N} \Delta_{n,m} B_{n+1,m} + e^{R_n} \left(X_n - \sum_{m=n+1}^{N} \Delta_{n,m} B_{n,m} \right) \tag{3.6}$$

Prvý výraz na pravej strane v rovnici (3.6) je výplata bezkupónovej obligácie so splatnosťou $n+1$, vynásobená počtom obligácií, do ktorých sme vstúpili v čase n a máme ich v držaní do času $n+1$. Druhý výraz je hodnota všetkých bezkupónových obligácií splatných v čase $n+2$ a neskôr, vynásobených počtom týchto obligácií, do ktorých sme vstúpili v čase n a máme ich v držaní do času $n+1$. Druhý činiteľ v treťom výraze vyjadruje našu peňažnú pozíciu v čase n, tj. rozdiel medzi bohatstvom X_n a hodnotou všetkých obligácií po vyvážení v čase n. Aby sme dostali súčasnú hodnotu v čase $n+1$, tak to ešte spojito úročíme úrokovou sadzbou v čase n.

Nasledujúca veta i s dôkazom je uvedená v [2].

Veta 3. *Bez ohľadu na to, ako sú náhodné premenné $\Delta_{n,m}$ zvolené, avšak splňujúce podmienku, že $\Delta_{n,m}$ môže závisieť iba na prvých n hodoch mincou, tak diskontovaný proces bohatstva $D_n X_n$ je martingal pri miere $\hat{P}$.*

Dôkaz. Použitím znalosti, že diskontované ceny obligácií tvoria martingal a vyňatím toho, čo poznáme, dostávame

$$\begin{aligned} E_n[X_{n+1}] &= \Delta_{n,n+1} + \sum_{m=n+2}^{N} \Delta_{n,m} E_n[B_{n+1,m}] + e^{R_n}(X_n - \sum_{m=n+1}^{N} \Delta_{n,m} B_{n,m}) \\ &= \Delta_{n,n+1} + \sum_{m=n+2}^{N} \frac{\Delta_{n,m}}{D_{n+1}} E_n[D_{n+1} B_{n+1,m}] + \frac{D_n}{D_{n+1}}(X_n - \sum_{m=n+1}^{N} \Delta_{n,m} B_{n,m}) \\ &= \Delta_{n,n+1} + \sum_{m=n+2}^{N} \frac{\Delta_{n,m}}{D_{n+1}} D_n B_{n,m} + \frac{D_n}{D_{n+1}} X_n - \frac{D_n}{D_{n+1}} \sum_{m=n+1}^{N} \Delta_{n,m} B_{n,m} \\ &= \Delta_{n,n+1} + \frac{D_n}{D_{n+1}} X_n - \frac{D_n}{D_{n+1}} \Delta_{n,n+1} B_{n,n+1}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Pretože $\frac{D_{n+1}}{D_n}$ závisí iba na prvých n hodoch mincou, dostávame ďalej

$$B_{n,n+1} = \hat{E}_n \left[\frac{D_{n+1}}{D_n} \right] = \frac{D_{n+1}}{D_n}.$$

Nahradením $B_{n,n+1}$ v rovnici (3.7) a opätovným využitím, že D_{n+1} závisí iba na prvých n hodoch mincou, máme

$$\hat{E}_n[D_{n+1}X_{n+1}] = D_nX_n,$$

čo je martingal pri miere $\hat{P}$. □

Z vlastností martingalu má diskontovaný proces bohatstva konštantnú strednú hodnotu

$$\hat{E}[D_nX_n] = X_0,\ n = 0, 1, ..., N. \tag{3.8}$$

Predpokladajme, že vieme obchodovaním s bezkupónovými obligáciami a na peňažnom trhu vytvoriť arbitráž, tj. $X_0 = 0$ a v nejakom budúcom čase n $X_n \geq 0$, bez ohľadu na výsledky hodov mincou a $X_n > 0$ pre niektoré z výsledkov hodov. Dostávame $\hat{E}[D_nX_n] > 0 = X_0$. To je spor s vetou 3 a rovnicou (3.8). Inými slovami, použitím rizikovo neutrálneho vzorca (3.5) pre definovanie cien bezkupónových obligácií, sme dokázali skonštruovať model, v ktorom nie je možnosť arbitráže.

Definícia 15. *Kupónovou obligáciou rozumieme dlhopis, ktorý emitentovi dáva povinnosť vyplácať majiteľovi obligácie kupónové platby a s poslednou kupónovou platbou vyplatiť aj istinu.*

Majme $0 \leq m \leq N$ a postupnosť $C_0, C_1, ..., C_m$. Pre $0 \leq n \leq m-1$ konštanta C_n označuje kupónovú platbu v čase n. Konštanta C_m je platba v čase m, ktorá zahŕňa istinu a kupón v čase m. Bezkupónovú obligáciu z definície 14 so splatnosťou v čase m je teda možno vyjadriť ako $C_0 = C_1 = ... = C_{m-1} = 0$ a $C_m = 1$. Kupónovú obligáciu môžme považovať ako sumu C_1 bezkupónových obligácií so splatnosťou v čase 1, C_2 bezkupónových obligácií so splatnosťou v čase 2 a tak ďalej až po C_m bezkupónových obligácií so splatnosťou v čase m. Dostávame tak cenu kupónovej obligácie v čase nula

$$\sum_{k=0}^{m} C_kB_{0,k} = \hat{E}\left[\sum_{k=0}^{m} D_kC_k\right]$$

a v čase n pred tým, ako ako sa platba C_n zrealizuje

$$\sum_{k=n}^{m} C_kB_{n,k} = \hat{E}_n\left[\sum_{k=n}^{m} \frac{C_kD_k}{D_n}\right],\ n = 0, 1, ..., m.$$

Ďalej si zadefinujeme dva podobné finančné deriváty - cap a floor, ktorých výplata je závislá na vývoji úrokovej sadzby.

Definícia 16. *Nech m je dané, splňujúce $1 \leq m \leq N$. Úrokový m-periodický cap je kontrakt s platbami $C_1, .., C_m$ v časoch 1,…,m, kde C_n sú definované ako*

$$C_n = (R_{n-1} - K)^+,\ n = 1, ..., m.$$

Podobne definujeme úrokový m-periodický floor ako kontrakt s platbami $F_1, .., F_m$ v časoch 1,..,m, kde F_n sú definované ako

$$F_n = (K - R_{n-1})^+,\ n = 1, ..., m.$$

Kontrakt s jedinou platbou C_n v čase n sa nazýva úrokový caplet. Podobne kontrakt s jedinou platbou F_n v čase n sa nazýva úrokový floorlet.

Úrokový cap a floor môžme teda považovať istým spôsobom za kupónové obligácie a vieme odvodiť ich rizikovo neutrálnu cenu v čase nula. Konkrétne, rizikovo neutrálna cena m-periodického úrokového capu je

$$Cap_{0,m} = \hat{E}\left[\sum_{n=1}^{m} D_n(R_{n-1} - K)^+\right],$$

a rizikovo neutrálna cena m-periodického úrokového flooru je

$$Floor_{0,m} = \hat{E}\left[\sum_{n=1}^{m} D_n(K - R_{n-1})^+\right].$$

3.2 Binomický strom pre Ho-Leeho model

V predchádzajúcej podkapitole sme si zaviedli základné formule pre ocenenenie bezkupónových aj kupónových obligácií, ktoré budeme môcť využiť v jednotlivých uzloch binomického oceňovacieho binomického stromu Ho-Leeho modelu pre opcie v diskrétnych časových momentoch.

Ho-Leeho model bol prvý krát prezentovaný ako binomický strom. Diskretizáciou rovnice (2.1) a aproximáciou náhodnej veličiny ε pomocou náhodnej veličiny η s binomickým rozdelením

$$\eta = \begin{cases} 1 & p = \frac{1}{2} \\ -1 & q = 1 - p \end{cases}$$

dostávame

$$\Delta r_t = \theta_t \Delta t + \sigma\eta\sqrt{\Delta t}.$$

Pre model krátkodobých sadzieb so strednou hodnotou a rozptylom Δr_t danými ako

$$E[\Delta r_t] = \theta(t)\Delta t$$
$$var[\Delta r_t] = \sigma^2 \Delta t$$

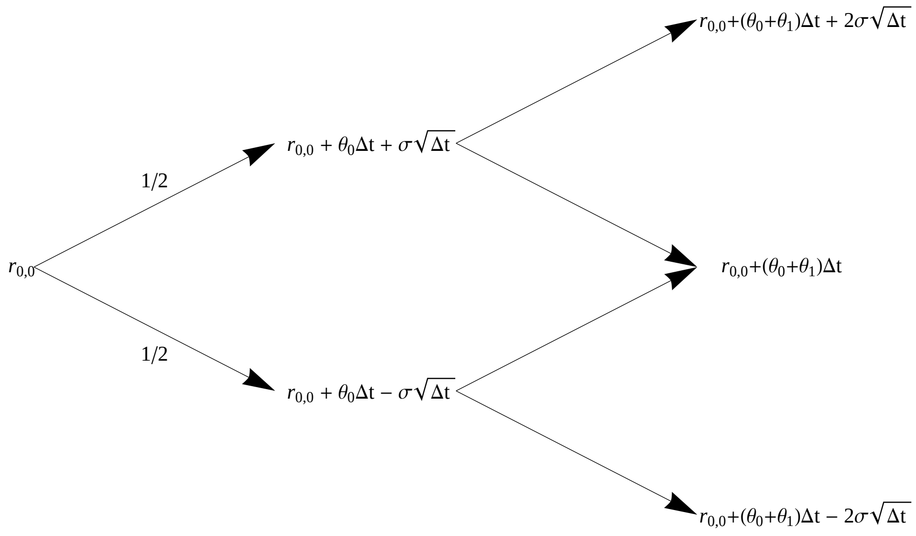
uvažujeme prirodzenú aproximáciu binomickým stromom, kde pravdepodobnosti vetvenia sú zhodne $\frac{1}{2}$.

Nech pre prehľadnosť je ďalej

$$r_{i,n} = r_{0,0} + \Delta t \sum_{k=1}^{n-1} \theta_k + (2i - n)\sigma\sqrt{\Delta t},\ i = 0, 1, ..., n.$$

Dolný koeficient i značí počet "pohybov hore" po strome a dolný koeficient n značí čas.

Predtým, ako sa Ho-Leeho model použije pre ocenenie finančných derivátov, tak je potrebné, aby sa takýto binomický strom nakalibroval podľa vstupnej časovej štruktúry. Potrebujeme zistiť priemerný smer, ktorým sa $r_{i,n}$ budú pohybovať, tj. zistiť kalibračné koeficienty θ_t. Toto nakalibrovanie je možné dosiahnúť pomocou tzv. Arrow-Debreuových cien bezkupónových obligácií všetkých splatností (viď [4]).



Obr. 3.1: Binomický strom Ho-Leeho modelu

3.2.1 Arrow-Debreuove ceny

Arrow-Debreuov cenný papier je kanonické aktívum, ktoré má cash-flow čiastky 1, ak úroková sadzba dosiahne konkrétny stav, inak nič. Nech $1 \leq k \leq j$, potom $Q_{k,j}^i$ označíme cenu cenného papieru v čase k, ktorý vyplatí čiastku 1 v čase j, ak sa dosiahne stav i, inak nič.

Pomocou portfólia Arrow-Debreuových cenných papierov teda možno skonštruovať bezkupónovú obligáciu. A teda cenu bezkupónovej obligácie v čase k so splatnosťou v čase j vieme z lienarity vyjadriť ako

$$B_{k,j} = \sum_{i=0}^{j} Q_{k,j}^i. \tag{3.9}$$

Z rizikovo neutrálnej oceňovacej rovnice môžme $Q_{k,j}^i$ vyjadriť pomocou podmienenej strednej hodnoty ako

$$Q_{k,j}^i = \hat{E}_k \left[\frac{D_j}{D_k} Q_{j,j}^i \right], \tag{3.10}$$

kde

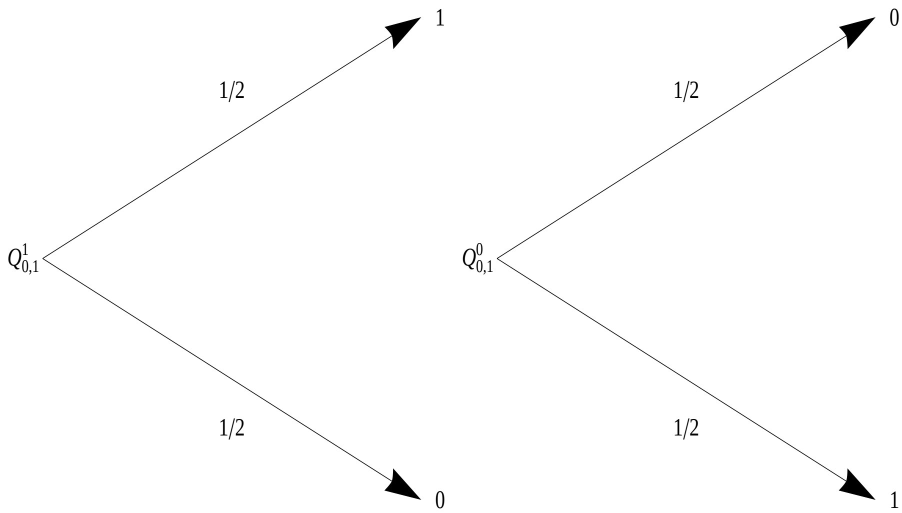
$$Q_{j,j}^i = \begin{cases} 1 & stav\, i \\ 0 & inak. \end{cases}$$

Predpokladajme, že chceme zistiť Arrow-Debreuove ceny v čase nula. Z definície $B_{0,0} = 1$, dostávame $Q_{0,0}^0 = 1$, s ktorým začíname. Z rovnice (3.10) ďalej pre $Q_{0,1}^0$ a $Q_{0,1}^1$ dostávame vzťah

$$Q_{0,1}^0 = Q_{0,1}^1 = \frac{1}{2} e^{-r_{0,0}\Delta t}. \tag{3.11}$$

Predpokladajme, že sme podobným postupom dostali

$$Q_{0,j}^i, \; i = 0, 1, ...j; \; j = 0, 1, .., n-1.$$



Obr. 3.2: Jednoperiodický strom pre Arrow-Debreuove ceny v čase nula

Potom sa dostávame ku kalkulácii $Q^{\cdot}_{0,n}$, kedy využijeme jeden zo vzťahov v rovnici (3.12)

$$
\begin{aligned}
Q^0_{0,n} &= \frac{e^{-r_{0,n-1}\Delta t}}{2} Q^0_{0,n-1} \\
Q^i_{0,n} &= \frac{e^{-r_{i,n-1}\Delta t}}{2} Q^i_{0,n-1} + \frac{e^{-r_{i-1,n-1}\Delta t}}{2} Q^{i-1}_{0,n-1},\ i = 1,..,n-1 \\
Q^n_{0,n} &= \frac{e^{-r_{n-1,n-1}\Delta t}}{2} Q^{n-1}_{0,n-1}.
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

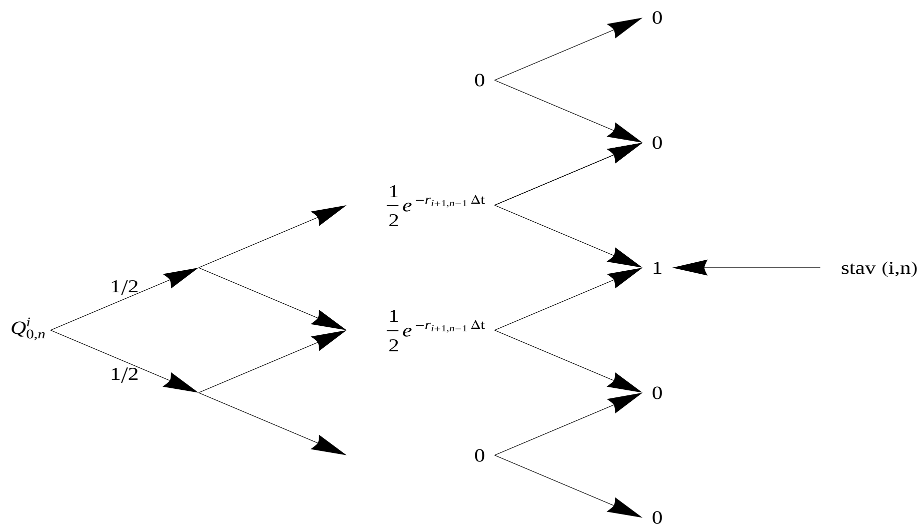
Indukčný vzorec pre $Q^{\cdot}_{0,n}$ z (3.12) môžme vypozorovať z obrázku 3.3. Po jednom kroku spätnej indukcie z času n sa nachádzajú v strome iba dva uzly s nenulovými hodnotami a to $(i-1, n-1)$ a $(i, n-1)$, pre ktoré už máme príslušné Arrow-Debreuove ceny. Arrow-Debreuova cena v uzle (i, n) je potom zrátaná podľa druhej rovnice v (3.12). Prvú a tretiu rovnicu využívame pri kalkulácii cien zodpovedajúcim prvému a poslednému uzlu v čase n.

Tento proces generuje strom Arrow-Debreuových cien, ktorý je znázornený na obrázku 3.4.

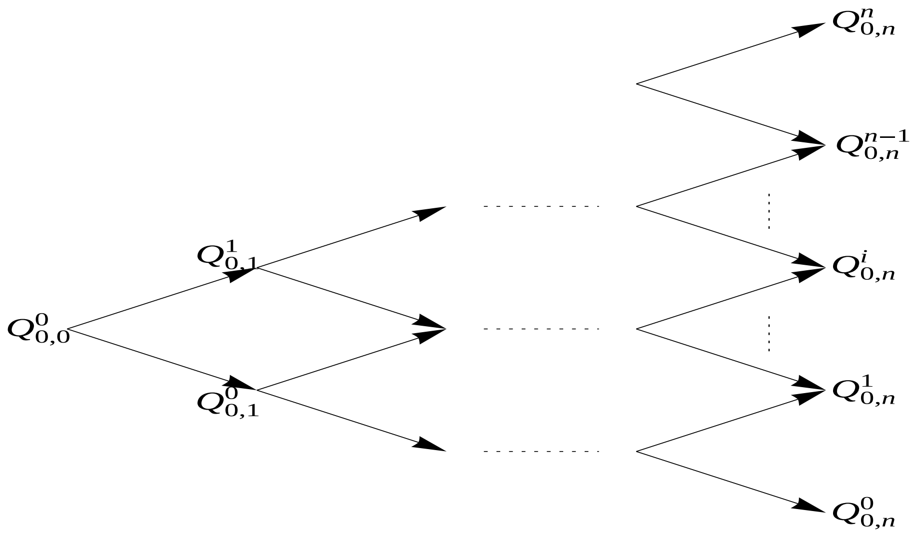
3.2.2 Kalibrácia stromu pre Ho-Leeho model

Arrow-Debreuove ceny sa stanovujú počas kalibrácie stromu Ho-Leeho modelu, kedy na základe vstupnej časovej štruktúry určujeme postupne θ_t, $t = 0, ..., n-1$. Nasleduje popis celej procedúry.

V prvom kroku určíme θ_0 pomocou ceny bezkupónových dlhopisov so splat-



Obr. 3.3: Indukčný oceňovací strom pre $Q_{i,n}$



Obr. 3.4: Arrow-Debreuov strom cien

nosťou v čase $2\Delta t$, tj.

$$\begin{aligned} B_{0,2\Delta t} &= Q^2_{0,2} + Q^1_{0,2} + Q^0_{0,2} \\ &\quad z\,(3.9) \\ &= e^{-\left(r_{0,0}+\theta_0\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\Delta t} Q^1_{0,1} + e^{-\left(r_{0,0}+\theta_0\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\Delta t} Q^0_{0,1} \\ &\quad z\,(3.12) \\ &= e^{-\theta_0(\Delta t)^2}\left(e^{-\left(r_{0,0}+\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\Delta t} Q^1_{0,1} + e^{-\left(r_{0,0}+-\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\Delta t} Q^0_{0,1},\right. \end{aligned} \tag{3.13}$$

kde $Q^{\cdot}_{0,1}$ nezávisia na θ_0 a sú vyjadrené rovnicou (3.11). Z (3.13) tak máme θ_0 vyjadrené ako

$$\theta_0 = \frac{1}{(\Delta t)^2} ln\left(\frac{e^{-\left(r_{0,0}+\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\Delta t} Q^1_{0,1} + e^{-\left(r_{0,0}-\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\Delta t} Q^0_{0,1}}{B_{0,2\Delta t}}\right).$$

S novou vypočítanou hodnotou θ_0 už vieme vypočítať hodnoty v uzloch úrokových sadzieb v čase 1 ako

$$\begin{aligned} r_{1,1} &= r_{0,0} + \theta_0 \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}, \\ r_{0,1} &= r_{0,0} + \theta_0 \Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

a potom aj zrátať $Q^i_{0,2}$, $i = 0, 1, 2$ pomocou rovnice (3.12).

Predpokladajme, že už sme zistili

$$\begin{aligned} \theta_j &\quad pre\, j = 0, 1, ...n-2 \\ r_{i,j} &\quad pre\, i = 0, 1, ..., j;\ j = 0, 1, ..., n-1 \\ Q^i_{0,j} &\quad pre\, i = 0, 1, ..., j;\ j = 0, 1, ..., n. \end{aligned}$$

Postúpime tak k určeniu $\theta_{n-1}, r_{\cdot,n}$ a $Q_{\cdot,n+1}$ použitím ceny bezkupónových dlhopisov so splatnosťou v čase $(n+1)\Delta t$, pre ktorú platí

$$\begin{aligned} B_{0,(n+1)\Delta t} &= \sum_{i=0}^{n-1} Q^i_{0,n} e^{-\left(r_{i,n-1}+\theta_{n-1}\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\Delta t} + Q^n_{0,n} e^{-\left(r_{n-1,n-1}+\theta_{n-1}\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\Delta t} \\ &= e^{-\theta_{n-1}(\Delta t)^2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} Q^i_{0,n} e^{-\left(r_{i,n-1}-\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\Delta t} + Q^n_{0,n} e^{-\left(r_{n-1,n-1}+\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\Delta t} \right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Máme tak znovu explicitné vyjadrenie pre θ_{n-1}:

$$\theta_{n-1} = \frac{1}{(\Delta t)^2} ln \left(\frac{\sum_{i=0}^{n-1} Q^i_{0,n} e^{-\left(r_{i,n-1}-\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\Delta t} + Q^n_{0,n} n e^{-\left(r_{n-1,n-1}+\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\Delta t}}{B_{0,(n+1)\Delta t}} \right) \tag{3.16}$$

Ďalej vieme vypočítať $r_{\cdot,n}$ podľa nasledujúceho vzťahu

$$\begin{aligned} r_{i,n} &= r_{i,n-1} + \theta_{n-1}\Delta t - \sigma\Delta t,\ i = 0, ..., n-1 \\ r_{n,n} &= r_{n-1,n-1} + \theta_{n-1}\Delta t + \sigma\Delta t, \end{aligned}$$

a nakoniec dopočítame Arrow-Debreuove ceny $Q^i_{0,n+1}$, $pre\ i = 0, 1, ..., n+1$ z (3.12).

Vyššie uvedený postup môžme zhrnúť do jedného algoritmu.

1. Nech $r_{0,0} = r_0$ a $Q^0_{0,0} = 1$.

2. Pre $j = 1, ..., n-1$,

   (a) vypočítaj $Q^i_{0,j}$ podľa rovnice (3.12) pre $i = 0, ..., j$;

   (b) vypočítaj $r_{i,j} = r_{i,j-1} - \sigma\sqrt{\Delta t}$, $i = 0, ..., j-1$ a $r_{j,j} = r_{j-1,j-1} + \sigma\sqrt{\Delta t}$;

   (c) sčítaj $Q^i_{0,j} e^{-r_{i,j}\Delta t}$ pre $i = 0, ..., j$;

   (d) vypočítaj θ_{n-1} podľa (3.16);

   (e) zameň hodnotu $r_{i,j}$ výrazom $r_{i,j} = r_{i,j} + \theta_{j-1}\Delta t$, $i = 0, ..., j$.

4. Príklady na oceňovanie

V tejto kapitole sa zameráme už na konkrétne typy úrokových opcií, ktoré si oceníme pomocou binomického stromu Ho-Leeho modelu.

4.1 Príklad na ocenenie capu

Zadanie: Predstavme si, že naša firma dlhuje 500 000 Kč, ktoré sme si požičali 20.1.2012 so 6 mesačnou úrokovou sadzbou PRIBOR. Nemyslíme si, že krátkodobé úrokové sadzby porastú a dokonca niektorí analytici prichádzajú s analýzami, že by mali v budúcnosti poklesnúť. Chceme si však požičiať, čo najlacnejšie, ale taktiež chceme byť chránený proti prípadnému rastu úrokových sadzieb. Rozhodneme sa preto vstúpiť do 5 ročného capu s cap sadzbou 2%. Aká by mala byť spravodlivá cena capu, ak vieme, že štandardná okamžitá odchýlka krátkodobej sadzby je 0,012?

Riešenie: Z definície 16 vieme, že cap vieme vyjadriť ako súčet jednotlivých capletov(európskych call opcií). A teda v tomto prípade pre 10 periodický cap píšeme, že

$$Cap_{0,10} = C_1 + C_2 + ... + C_{10},$$

kde C_n, $n = 1, 2, ..., 10$ sú jednotlivé hodnoty capletov. Pre ocenenie capu pomocou Ho-Leeho modelu, ktorý má parametre

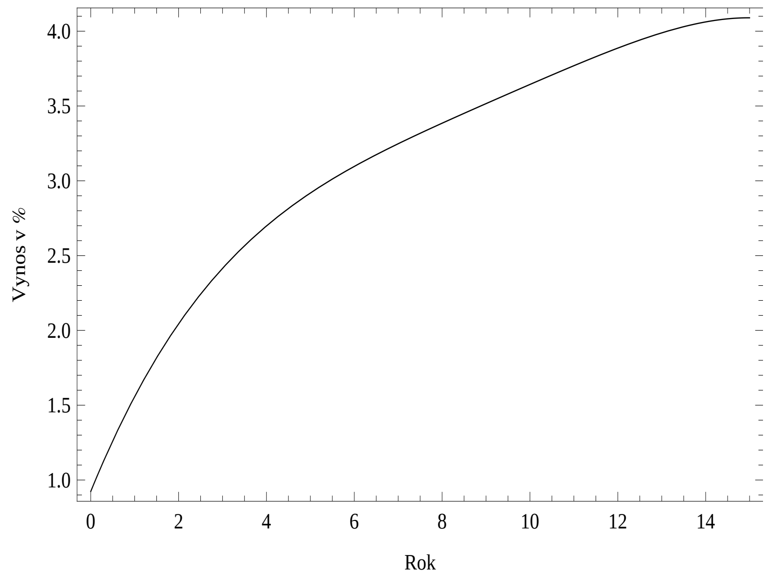
$$\Delta t = \frac{1}{2}$$
$$\sigma = 0,012,$$

si musíme najprv zaviesť vstupnú časovú štruktúru, čo bude v tomto prípade výnosová krivka zostrojená zo sadzieb PRIBOR zo dňa 20.1.2012 a cien bezkupónových obligácii so splatnosťou T rokov, $1 < T \leq 15$, ktoré sme stiahli zo stránok ČNB pomocou zdrojového kódu v Mathematice uvedeného v [5]. Zostrojená výnosová krivka je zobrazená na obrázku 4.1.

Z výnosovej krivky vieme vypočíťať ceny bezkupónových obligácií s rôznymi splatnosťami. Nech t je splatnosť obligácie, tak

$$B_{0,t} = e^{-y(t)t},$$

kde $y(t)$ je výnos v čase t. Dostávame tak tabuľku cien bezkupónových obligácií (diskontných faktorov):



Obr. 4.1: Výnosová krivka z 20.01.2012

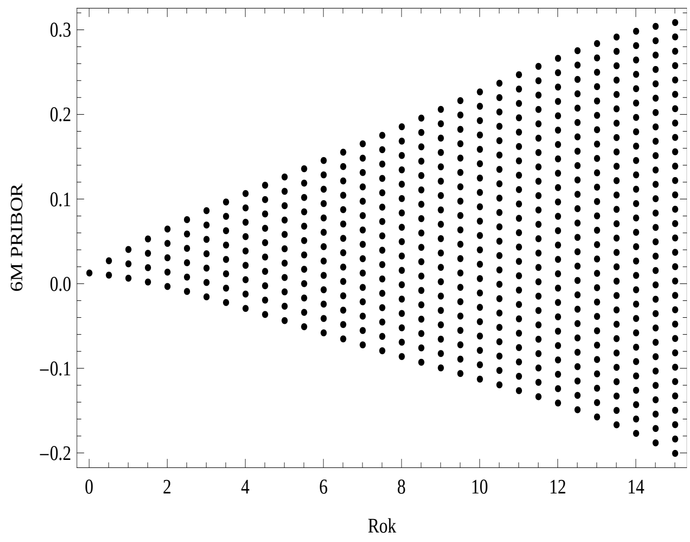
Rok	Diskontný faktor	Rok	Diskontný faktor
0,5	0,993711	8	0,762763
1	0,984537	8,5	0,745774
1,5	0,973101	9	0,728745
2	0,959935	9,5	0,711682
2,5	0,945485	10	0,694606
3	0,930115	10,5	0,677556
3,5	0,914112	11	0,660587
4	0,897696	11,5	0,643776
4,5	0,881028	12	0,627221
5	0,864223	12,5	0,611041
5,5	0,847351	13	0,595378
6	0,830454	13,5	0,580394
6,5	0,81355	14	0,566275
7	0,79664	14,5	0,553232
7,5	0,779715	15	0,541499

Z tejto vstupnej časovej štruktúry vieme na základe postupu vysvetleného v predchádzajúcej kapitole vyrátať Arrow-Debreuove ceny, z ktorých následne nakalibrujeme binomický strom Ho-Leeho modelu. Pre $r_{0,0}$ platí

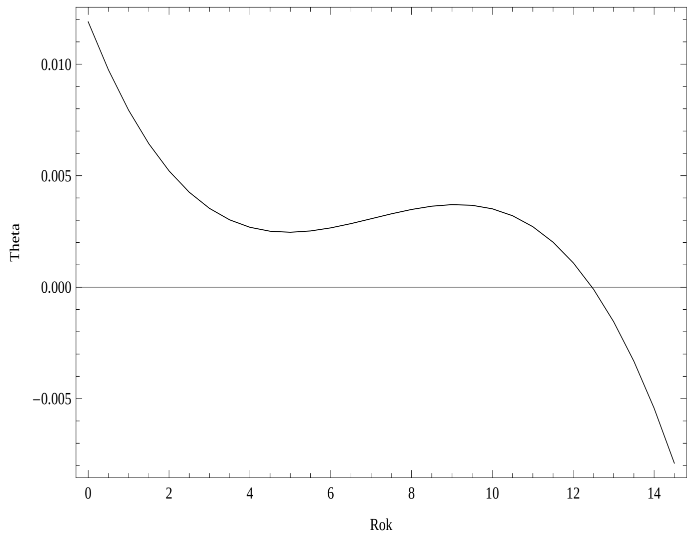
$$r_{0,0} = -\frac{lnB_{0,\Delta t}}{\Delta t}.$$

Na obrázku 4.3 je znázornený vývoj Ho-Leeho driftu $\theta(t)$ a na obrázku 4.2 modelovaný vývoj 6 mesačnej úrokovej sadzby PRIBOR.

Označme V_t^j hodnotu capletu v čase t v stave j a V_T^j výplatu v čase T v stave j. Rizikovo neutrálna oceňovacia formula je kľúčová pri oceňovaní capletu pomocou binomického stromu Ho-Leeho modelu, tj. sa postupuje od času expirácie capletu, kedy sa spočíta hodnota $V_T^j = C(r_{j,T-1} - K)^+$, kde C je hodnota istiny (v našom prípade 500 000 Kč) a následne sa postupuje do počiatku stromu. Dostávame tak



Obr. 4.2: Modelovaný vývoj 6 mesačnej úrokovej sadzby PRIBOR



Obr. 4.3: Kalibrovaný Ho-Leeho drift $\theta(t)$ s použitím výnosovej krivky z 20.1.2012 a okamžitej smerodatnej odchýlky $\sigma = 0.012$ a $\Delta t = \frac{1}{2}$

vyjadrené V_t^j ako

$$V_t^j = \hat{E}\left[e^{-r_t \Delta t} V_{t+1} \mid r_t = r_{j,t}\right] = e^{-r_{j,t}\Delta t}\frac{V_{t+1}^j + V_{t+1}^{j+1}}{2},\ t = 0, 1, ..., T-2;\ j = 0, 1, ..., t.$$

Každý uzol $V_{T-1}^{\cdot}$ má totiž z definície $V_T^{\cdot}$ iba jedného nasledovníka a tak dostávame vzťah

$$V_{T-1}^j = e^{-r_{j,T-1}\Delta t} V_T^j,\ j = 0, 1, ..., T-1.$$

Výsledná hodnota capletu v čase nula je teda vždy hodnota V_0^0.

Aplikovaním vyššie uvedeného postupu dostávame hodnoty jednotlivých capletov a výslednú hodnotu capu ako ich súčtu.

$$\left.\begin{array}{rc} C_1 = & 0\,K\check{c} \\ C_2 = & 1728,41\,K\check{c} \\ C_3 = & 3288,14\,K\check{c} \\ C_4 = & 4757,82\,K\check{c} \\ C_5 = & 6336,4\,K\check{c} \\ C_6 = & 7276,08\,K\check{c} \\ C_7 = & 7973,62\,K\check{c} \\ C_8 = & 8721,04\,K\check{c} \\ C_9 = & 9028,6\,K\check{c} \\ C_{10} = & 9506,14\,K\check{c} \end{array}\right\} \quad Cap_{0,10} = \sum_{j=1}^{10} C_j = 58616,2\,K\check{c}$$

4.2 Príklad na ocenenie bariérovej opcie

Definícia 17. *Bariérova opcia je opcia, ktorej výplata závisí na tom, či cena podkladového aktíva dosiahla určitú úroveň počas svojej existencie. Klasifikujeme ich buď ako out alebo in opcie. In opcie sú na začiatku existencie bezcenné a začínajú existovať v momente, kedy cena podkladového aktíva prelomí tzv. knock-in bariéru. Naopak, out opcie sú na začiatku existencie aktívne a v okamihu, keď cena podkladového aktíva prelomí tzv. knock-out bariéru sa stávaju definitívne neplatnými.*

Na základe definície 1 rozlišujeme štyri rôzne druhy bariérových opcií:

- *Down-and-out*: bariérová opcia prestáva existovať v momente, keď spotová cena podkladového aktíva zhora prerazí knock-out bariéru, ktorá je stanovená pod súčasnú spotovú cenu aktíva.
- *Up-and-out*: bariérová opcia prestáva existovať v momente, keď spotová cena podkladového aktíva zdola prerazí knock-out bariéru, ktorá je stanovená nad súčasnú spotovú cenu aktíva.
- *Down-and-in*: bariérová opcia začína existovať v momente, keď spotová cena podkladového aktíva zhora prerazí knock-in bariéru, ktorá je stanovená pod súčasnú spotovú cenu aktíva.
- *Up-and-in*: bariérová opcia začína existovať v momente, keď spotová cena podkladového aktíva zdola prerazí knock-in bariéru, ktorá je stanovená nad súčasnú spotovú cenu aktíva.

Zadanie: Predstavme si, že 20.1.2012 chceme kúpiť up-and-out úrokovú call opciu závislú na sadzbe PRIBOR. Hodnota podkladového aktíva je 1 000 000 Kč a štandarná okamžitá odchýlka krátkodobej sadzby je 0,012. Ktorá z nasledujúcich opcií by bola pre nás výhodnejšia?

1. európska opcia so splatnosťou 5 rokov uzavretá na 6 mesačný PRIBOR s realizačnou sadzbou 2% a knock-out sadzbou 6%.
2. európska opcia so splatnosťou 4 roky uzavretá na 3 mesačný PRIBOR s realizačnou sadzbou 2% a knock-out sadzbou 6%.

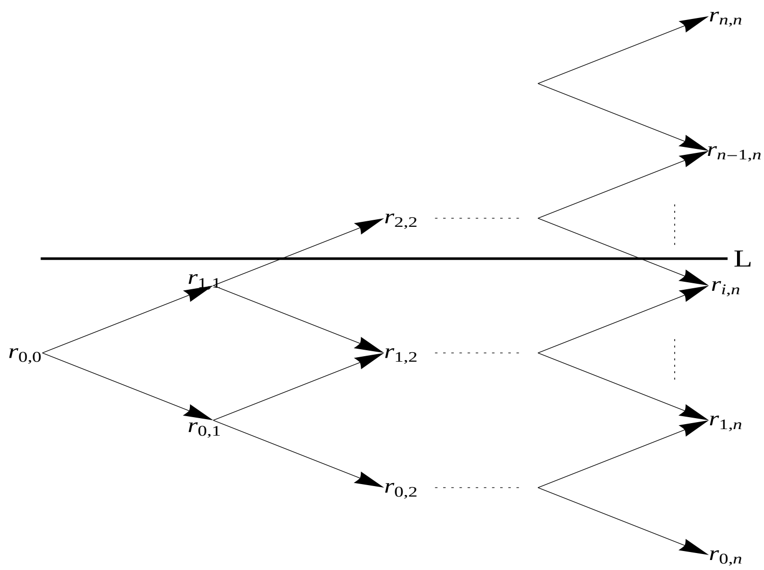
Riešenie:

1. Pre ocenenie tejto opcie použijeme nakalibrovaný binomický strom Ho-Leeho modelu z predchádzajúcej podkapitoly. Taktiež označme V_t^j hodnotu bariérovej opcie v čase t pre stav j, $j = 0, 1, .., t$. V prvom kroku pri oceňovaní bariérovej up-and-out opcie je priradenie nuly všetkým uzlom V_t^j v strome, do ktorých sa vieme dostať iba výlučne tak, že krátkodobá sadzba prerazí knock-out bariéru, ktorej hodnotu označme L. To znamená, že

$$V_t^j = 0 \begin{cases} r_{t-1,t-1} > L \, pre \, t = j \\ r_{j-1,t-1} > L \wedge r_{j,t-1} > L \, pre \, t > j > 0 \\ r_{0,t} > L \, pre j = 0. \end{cases}$$

Výplata opcie v čase expirácie $T = 5$ rokov pre stav j, v ktorom $r_{j,T-1} \leq L$, je daná ako $V_T^j = C(r_{j,T-1} - K)^+$, kde C je hodnota podkladového aktiva, K realizačná sadzba a $j = 0, 1, ..., T - 1$. Teda pre nenulové hodnoty V_{T-1}^j opäť platí, že

$$V_{T-1}^j = e^{-r_{j,T-1}\Delta t} V_T^j, \; j = 0, 1, ..., T - 1.$$



Obr. 4.4: Strom krátkodobých sadzieb s knock-out bariérou L.

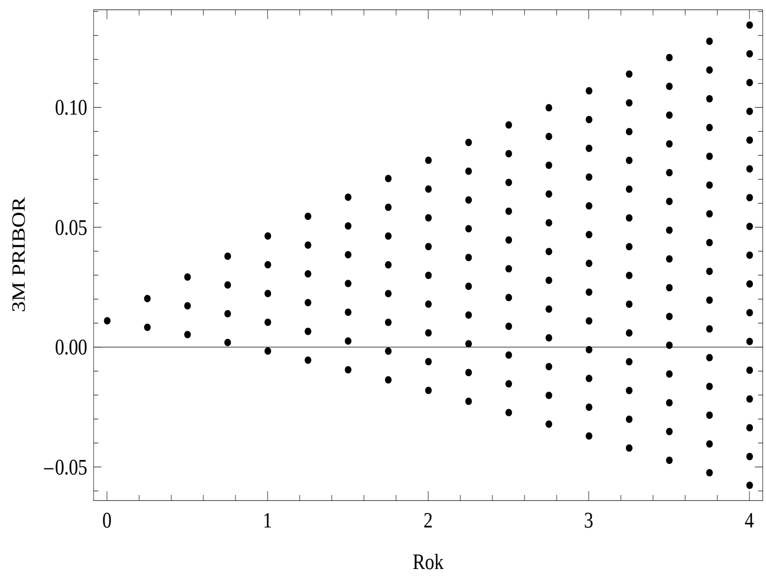
Pre prehľadnosť uvádzame možné výplaty opcie v čase expirácie.

Stav	6M PRIBOR	Výplata opcie
0	$-0,0363912$	0
1	$-0,0194206$	0
2	$-0,00245004$	0
3	$0,0145205$	0
4	$0,0314911$	$11491,1$
5	$0,0484617$	$28461,7$
6	$0,0654322$	0
7	$0,0824028$	0
8	$0,0993733$	0
9	$0,116344$	0

Z takto počiatočne určených konkrétnych V_t^j a výplat už možno (podobne ako pri oceňovaní capletu) z rizikovo neutrálnej oceňovacej formuli dorátať počiatočnú hodnotu bariérovej opcie, tj. V_0^0. Dostávame tak hodnotu bariérovej opcie

$$Barier_1 = 7357,32\,K\check{c}.$$

2. Najprv si nakalibrujeme binomický strom Ho-Leeho modelu. Dostávame tak vymodelovaný vývoj trojmesačnej sadzby PRIBOR znázornenom na obrázku 4.5. Ďalej použijeme rovnaký postup ako pri oceňovaní prvej bariérovej opcie.



Obr. 4.5: Modelovaný vývoj 3 mesačnej úrokovej sadzby PRIBOR.

Pre prehľadnosť taktiež uvádzame možné výplaty opcie v čase expirácie.

Stav	3M PRIBOR	Výplata opcie
0	−0, 0524025	0
1	−0, 0404025	0
2	−0, 0284025	0
3	−0, 0164025	0
4	−0, 00440253	0
5	0, 00759747	0
6	0, 0195975	0
7	0, 0315975	11597, 5
8	0, 0435975	23597, 5
9	0, 0555975	35597, 5
10	0, 0675975	0
11	0, 0795975	0
12	0, 0915975	0
13	0, 103597	0
14	0, 115597	0
15	0, 127597	0

Z rizikovo neutrálnej oceňovacej formuli opäť dorátame počiatočnú hodnotu bariérovej opcie. Dostávame tak hodnotu bariérovej opcie

$$Barier_2 = 10517,9 K\check{c}.$$

Záver: Je pre nás výhodnejšie investovať do prvého typu opcie, pretože jej cena je o $3160,58$ Kč nižšia.

Záver

Cieľom práce bolo ukázať oceňovanie úrokových opcií v binomickom modeli. Táto štruktúra predstavuje jednoduchú, ale pritom komplexnú možnosť stanovenia prémie. Black-Scholesov model (viď [3]), ktorý sa používa bežne pri stanovovaní cien opcií, je možné použiť iba pri oceňovaní tých opcií, ktoré sú nezávislé na vývoji úrokových sadzieb, pretože predpokladá konštantnú úrokovú sadzbu. Binomický model sa taktiež vyznačuje presnejším výsledkom oceňovania, čo sa týka dlhodobejších opcií a oceňovaní derivátov s podkladovými aktívami, ktoré umožňujú výplatu dividendy a ktoré sú závislé na vývoji úrokovej sadzby.

Oceňovanie úrokových opcií sme si ukázali pomocou binomického stromu Ho-Leeho modelu, ktorý je navrhnutý veľmi jednoducho, ale na jeho základe vieme veľmi presne určiť cenu opcie v ľubovoľnom čase. Jeho jedinou nevýhodou je, že kalibráciou stromu sa krátkodobé sadzby v niektorých uzloch stromu môžu dostať do nereálnych záporných hodnôt. Na nepresnosť v ocenení opcie to však vplyv nemá. Oceňovať opcie v strome je taktiež možné napríklad Hull-Whiteovým modelom, ktorý je nakalibrovaný do zložitejšieho trinomického stromu, alebo Cox, Ingersoll a Rossovým modelom, ktorý zas naopak vylučuje zápornosť krátkodobých sadzieb (viď [3]).

Zoznam použitej literatúry

[1] Filipović, D. *Term-Structure Models: A Graduate Course.* Springer, Berlin Heidelberg, 2009. ISBN 978-3-540-09726-6.

[2] Shreve, S. E. *Stochastic Calculus for Finance I - The Binomial Asset Pricing Model.* Springer, New York, 2004. ISBN 0-387-40100-8.

[3] Hull, J. C. *Options, Futures and Other Derivatives.* Fifth Edition. Prentice Hall, New Jersey, 2002. ISBN 0-13-009056-5.

[4] Lixin, W. *Interest Rate Modeling: Theory and Practice.* Chapman Hall/CRC Press, Boca Raton, 2009. ISBN 978-1-4200-9056-7.

[5] Hurt, J. *Prednáška - Výpočetní prostředky finanční a pojistné matematiky.* Univerzita Karlova, Praha, 2012 [online]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/ hurt/VPFPM2012.nb

[6] Ho, T. S. Y., Lee, S.-B., *Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims.* The Journal of Finance. Vol.41., No.5., strany 1011-1029. 1986.